INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO TRIÂNGULO MINEIRO (IFTM) - CAMPUS PARACATU
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDILENE SOARES CARDOSO

MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO DOS DADOS DE COVID-19 NO MUNICIPIO DE PARACATU

Paracatu-MG

2021

EDILENE SOARES CARDOSO

MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO DOS DADOS DE COVID-19 NO MUNICIPIO DE PARACATU

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro - Campus Paracatu, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes

Paracatu-MG

2021

C268m Cardoso, Edilene Soares -

Modelagem matemática a partir de equações diferenciais ordinárias: um estudo dos dados de Covid-19 no município de Paracatu / Edilene Soares Cardoso - 2021.

65 f. : il.

Orientador: Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro, Curso de Licenciatura em Matemática, Paracatu, 2021.

1. Modelagem matemática. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Epidemiologia. I. Arantes, Guilherme Ramon Gomes Pires. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro - Campus Paracatu. III. Titulo.

CDD 511.8

Bibliotecária: Nathália de Morais Torres CRB6-3097

EDILENE SOARES CARDOSO

MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO DOS DADOS DE COVID-19 NO MUNICIPIO DE PARACATU

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro, Campus Paracatu, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 12 de julho de 2021.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Esp.: Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes (Prof. Orientador)

____

Prof. Msc.: Ivanete Lopes Gonzaga (Prof. Convidado)

____

Prof. Esp.: Mauro Júnio Prado (Prof. Convidado)

Paracatu-MG

2021

Ao meu Senhor Deus Altíssimo.

Aos meus Coordenadores e Professores.

Ao meu filho Eliel José Cardoso

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado saúde, força e esperança para nunca ter desistido de alcançar meus objetivos.

Ao instituto, seu corpo docente, direção e administração que abriram essa oportunidade para que hoje eu pudesse usufruir dessa vitória.

Ao meu orientador Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes, pelo apoio no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu finalizasse o curso, o meu muitíssimo obrigado.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo abordar a Modelagem Matemática, a partir da perspectiva de Modelos Epidemiológicos. Inicialmente, será apresentado alguns resultados acerca de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que nortearão o leitor a compreensão de conceitos e fenômenos matemáticos. Em seguida, será exposto algumas considerações acerca de modelagem e modelo, bem como suas classificações e implicações no papel do professor quando empregada como ferramenta metodológica. Na sequência, será apresentado resultados de modelos de doenças para epidemiologia a partir de equações diferenciais ordinárias, e um breve estudo sobre os casos de Covid-19 no município de Paracatu – MG, onde será realizada uma pequena modelagem dos dados. A metodologia adotada para a pesquisa tem caráter quantitativo, no entanto em alguns momentos haverá presença de aspectos qualitativos, inicialmente opta-se pela pesquisa bibliográfica e no fim pela pesquisa exploratória com base nos dados coletados. Contudo, nota-se que os resultados encontrados foram satisfatórios, pois através da Modelagem Matemática é possível estimar, prever e tomar decisões corretas em uma epidemia.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Equações Diferenciais Ordinárias, Epidemiologia.

ABSTRACT

The present work aims to approach Mathematical Modeling from the perspective of Epidemiological Models. Initially, some results will be presented about first-order ordinary differential equations that will guide the reader in understanding mathematical concepts and phenomena. Then, some considerations about modeling and model will be exposed, as well as their classifications and implications on the teacher's role when used as a methodological tool. Next, results of disease models for epidemiology from ordinary differential equations will be presented, as well as a brief study of the cases of Covid-19 in the municipality of Paracatu - MG, where a small data modeling will be performed. The methodology adopted for the research has a quantitative character, however at times there will be the presence of qualitative aspects, initially opting for bibliographical research and in the end for exploratory research based on the collected data. However, it is noted that the results found were satisfactory, because through Mathematical Modeling it is possible to estimate, predict and make correct decisions in an epidemic.

Keywords: Mathematical Modeling, Ordinary Differential Equations, Epidemiology.

LISTA DE ABREVEATURA E SIGLAS

EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
PVI	Problema de Valor Inicial
T	Tempo

LISTA DE SIMBOLOS

α	Alfa
Δ	Delta
∂	Diferença parcial
φ	Fi
℃	Graus Celsius
$\int$	Integral
∞	Infinito
λ	Lambda
π	Pi
θ	Teta
Ψ	Psi

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **1**

1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS **3**

1.1 Breve Contexto Histórico **3**

1.2 Modelo de Equações Diferenciais **4**

1.3 Classificação **7**

1.3.1 O número de variáveis independentes 7

1.3.2 O número de funções incógnitas 7

1.3.3 A ordem da equação 8

1.3.4 A estrutura da equação 8

1.4 Soluções e problemas de valor inicial **9**

1.5.1 Equações Separáveis 12

1.5.2 Equações Lineares 14

1.5.2.1 Resumo do Método 16

1.5.3 Equação de Bernoulli 18

1.5.4. Função Homogênea 19

1.5.4.1 Equação Diferencial Homogênea 20

1.5.4.2 Resolução de EDO's homogêneas: 21

1.5.5 Equações Exatas 24

1.5.5.1 Método de solução 24

1.5.5.2 Determinação da solução geral 25

1.5.5.3 Resumo do método 27

1.6 Aplicações de EDO's de primeira ordem **28**

1.6.1 Problema de variação de temperatura 28

1.6.2 Radioatividade 29

2 MODELAGEM MATEMÁTICA **32**

2.1 contexto histórico **32**

2.2 Aspectos Gerais **33**
2.3 Modelagem e Modelos **33**
2.4 Etapas da Modelagem Matemática **35**
2.5 A Modelagem Matemática como Instrumento Pedagógico **37**
3 MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS **40**
3.1 Contexto histórico **40**
3.2 Modelos Matemáticos **41**
3.2.1 Modelo I 41
3.2.2 Modelo II 43
3.3 Modelagem dos dados **44**
3.4 Análise dos resultados **50**
CONSIDERAÇÕES FINAIS **52**
REFERÊNCIAS **53**

INTRODUÇÃO

O presente trabalho surge com base na disciplina de Equações Diferencias Ordinárias de Primeira e Segunda Ordem e tem como principal objetivo aprofundar os conceitos teóricos e revelar a aplicabilidade das equações diferenciais ordinárias em situações cotidianas.

As equações diferenciais começaram a ser estudadas durante o século XVII com o estudo do cálculo diferencial pelos matemáticos Isaac Newton (1643- 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Relatos históricos sugerem que Leibniz possivelmente fez correspondência com os irmãos Bernoulli.

A partir do século XVIII, com advento do iluminismo e consequentemente com a revolução industrial, vários problemas robustos começaram a ser modelados com equações diferenciais. Neste período, contribuíram de forma significativa para o estudo das equações diferenciais os matemáticos: Leonhard Paul Euler (1707 – 1783), os irmãos Jacob (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), Daniel Bernoulli (1700-1782), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).

No século XX, com os avanços das Ciências, ocorreu a criação de métodos geométricos ou topológicos, principalmente para equações não lineares que tem como objetivo compreender qualitativamente, o processo de soluções da perspectiva geométrico, como também analítico. Nos últimos sessenta anos, com a posse de computadores pessoais com versões mais adequadas, tornou possível a resolução por métodos numéricos de equações diferencias ordinária.

Boyce e Diprima (2015), afirmam que a partir da década de 1970, com a Revolução Técnica – Científico e a popularização do computador e dos programas de linguagem culminaram na resolução de problemas até então insolutos. Sendo assim, a computação cientifica proporcionaram um renovo ao estudo de sistemas de equações diferenciais não lineares. Onde pelas quais descobriram fenômenos extraordinários, como por exemplo, atratores estranhos, caos e fractais, que estão sendo profundamente discutidos e estão criando ideias modernas e significativas em várias aplicações distintas.

Nessa perspectiva, espera-se através deste trabalho oportunizar nova fonte de pesquisa bibliográfica para que estudantes e pesquisadores aperfeiçoem seus conhecimentos sobre a aplicabilidade das equações diferenciais ordinárias e que esta possa servir como base para trabalhos futuros.

Ressalta-se que o objetivo principal desta pesquisa é apresentar um estudo introdutória sobre equações diferenciais ordinárias e suas aplicações.

Para revisão bibliográfica, foi utilizado a obra dos autores Boyce e Diprima, (2015), Nagle *et. all.*, (2012), Yartey e Ribeiro (2017), Zill e Cullen (2001) e outros trabalhos como Bassanezi (2002), Kreyszig (2008) e etc.

A pesquisa está dividida em três capítulos. No primeiro capítulo será desenvolvido um breve contexto histórico das equações diferenciais onde serão destacados os principais matemáticos e as soluções dos problemas de equações diferenciais. Nas seções seguintes deste capitulo falara-se sobre modelos de equações diferenciais e solução, classificação (quanto a ordem, tipo e linearidade) e sobre equação diferencial de primeira e segunda ordem, na sequência será feita a exemplificação de alguns exemplos e aplicação.

No segundo capítulo será apresentado a ideia de Modelagem Matemática, bem como suas implicações, destacara-se definições teóricas, objetivos e implicações no ensino de matemática.

No capítulo III será abordado o uso das equações diferenciais em problemas epidemiológicos, onde tentara-se construir modelos matemáticos para a análise dos casos de covid no município de Paracatu.

Contudo, espera-se que no final dessa pesquisa o leitor possa abstrair conhecimentos necessários para se aperfeiçoar na investigação e aplicabilidade das equações diferenciais ordinárias.

1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O estudo das Equações Diferenciais inicia-se a partir de problemas de modelagem nas ciências físicas, e com o decorrer do tempo abrange as demais áreas, desde a engenharia, economia, biologia e medicina, até as ciências sociais e artes. Abaixo, será descrito um breve relato histórico das equações diferenciais, assim como de alguns matemáticos que influenciaram esse campo de pesquisa.

1.1 Breve Contexto Histórico

As equações diferenciais têm em seu início em estudos de Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1642-1727), e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Com o entendimento da notação de derivada combinado com simplificações algébricas e manipulações simbólicas ajudaram na resolução das equações. No entanto, buscar soluções para estas equações não era algo fácil. Com a formulação da ideia da integral bem como as implicações do Teorema Fundamental do Cálculo impulsionaram a resolução de equações diferenciais de variáveis separáveis.

Inicialmente, Isaac Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as três formas: $\frac{dy}{dx} = f(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x, y)$, além disso, elaborou um método para solucionar esta equação $f(y) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x, y)$, “onde $f(x, y)$ é um polinômio em x e y usando séries infinitas” (BOYCE; DIPRIMA,2015, p. 66).

Em seus estudos Gottfried Leibniz generalizou as ideias do cálculo diferencial e integral. Focalizando para o desenvolvimento geral das teorias e técnicas para matemáticas posteriores. Suas principais colaborações estão no estudo das equações diferenciais de variáveis separáveis e homogêneas.

Outros matemáticos que merecem ser ressaltados no estudo das equações diferenciais são os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), que se concentraram no estudo de aplicações de equações diferenciais, como: na mecânica e no estudo dos fluidos. Esses matemáticos formularam a resolução das equações de Bernoulli.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) o maior matemático da época, teve papel fundamental no entendimento das teorias das equações diferenciais bem como sua relação com as funções. Foi o primeiro a matemático a compreender as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, bem como suas propriedades. Nas equações diferenciais suas contribuições englobam equações exatas, fatores integrantes, equações homogêneas e principalmente o cálculo da variação de parâmetros.

Na segunda metade do século XVIII, destacam-se Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) que demonstrou que as soluções independentes de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear, e Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) que desenvolveu pesquisas na mecânica celeste e principalmente revolucionou o estudo das equações diferenciais através das transformadas de Laplace.

No fim do século XVIII, vários métodos elementares para resolução de equações diferenciais ordinárias já haviam sido elaborados. No início do século seguinte o estudo concentrou-se à investigação de questões teóricas como a existência, a unicidade das soluções e a solução via expansão em séries de potências.

No fim do século XIX, com o desenvolvimento da teoria de funções analíticas complexas e a modelagem de problemas físico/matemáticos passa-se a estudar com maior densidade as equações diferenciais parciais. Com isso, há o aparecimento frequente de muitas funções e soluções de certas equações diferenciais ordinárias que consequentemente foram generalizadas. Por serem conhecidas coletivamente como funções transcendentais, várias destas estão associadas a nomes matemáticos, compreendendo Bessel, Legendre, Hermite, Chebyhev e Hankel, entre outros. (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

Algumas equações diferenciais não solúveis a métodos analíticos conduziram a resolução via análise de métodos numéricos. Por volta de 1900, os métodos de integração numérica já haviam sido elaborados, mas pelo fato destes cálculos serem feitos a mão e com a utilização de equipamentos computacionais muitos antigos a sua implementação estava intensamente prejudicada. Nos últimos sessenta anos, o desenvolvimento de computadores mais robustos ampliou o interesse nos problemas que podem ser analisados de modo mais fixa, por métodos numéricos. Ainda nesse mesmo período, foram desenvolvidos integradores numéricos bastante aprimorados e poderosos, prontamente acessível (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

1.2 Modelo de Equações Diferenciais

Para Yartey e Ribeiro (2017, p. 9) “uma equação algébrica é uma equação que tem números como incógnitas. Numa equação diferencial, a variável incógnita é uma função y(x) e x é a sua variável independente”.

Uma equação que demonstra uma junção entre a variável independente x, a função incógnita $y = f(x)$ e suas derivadas $y', y'', \ldots y(n)$ é denominada equação diferencial. Ela pode de ser escrita da seguinte forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y(n)) = 0.$$

Exemplo 1.1:

a. $y' = \cos x$ (primeira ordem)

b. $y'' + 4x = 0$ (segunda ordem)

c. $x^2 y''' + 2e^x y'' = (x^2 + 2)y^2$ (terceira ordem)

A matemática é vista em diversas áreas e têm auxiliado nos resultados de vários problemas especialmente os concernentes à ciência e engenharia.

Bassanezi (2002, p.15) afirma que,

> O objetivo fundamental do "uso" de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.

Nas ciências e na engenharia, modelos matemáticos são criados para ajudar no entendimento de fenômenos físicos. Estes modelos regularmente constituem uma equação que apresentam umas derivadas de uma função desconhecida. Tal equação é chamada de equação diferencial como definida anteriormente.

Segundo Kreyszig (2008, p.2) "as equações diferenciais são de importância fundamental na matemática e em suas aplicações em engenharia, visto que são usadas para expressar matematicamente diversas relações e leis físicas e são bastante adequadas para serem resolvidas por computador".

Para Nagle *et. all.* (2012, p.01),

> No caso da queda livre, um objeto é solto de certa altura acima do solo e cai sob a força da gravidade. A segunda lei de Newton, afirma que a massa de um objeto multiplicada por sua aceleração é igual à força total que atua sobre ele, pode ser aplicada ao objeto caindo.

Na figura abaixo, tem-se a ilustração da queda livre de uma maça e a equação diferencial que a modela.

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg$$

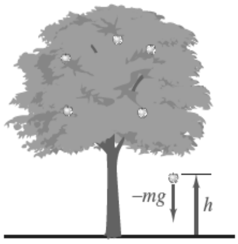


Figura 1: Maçã em queda livre
Fonte: (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012, p.01).

De acordo com Nagle *et. all*. (2012, p.01), “m é a massa do objeto, h é a altura acima do solo, $\frac{d^2h}{dt^2}$ é a sua aceleração, g é a aceleração gravitacional (constante) e −mg é a força devida à gravidade”. Esta é uma equação diferencial que contém a segunda derivada da altura desconhecida h como uma função do tempo.

Para resolver a equação anterior para h tem que dividir por m e depois integrar duas vezes com relação a t. Isto é:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g$$

De forma que:

$$\frac{dh}{dt} = -gt + c_1$$

e

$$h = h(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2$$

Note que as constantes de integração c_1 e c_2 são determinadas se percebermos a altura inicial e a velocidade inicial do objeto. Logo, dispõe se de uma fórmula para a altura do objeto no instante t. Perceba que a solução de uma equação diferencial é uma função, como h(t), e não exclusivamente um número. Veja que a integração é um instrumento significativo na solução de equações diferenciais. Por fim, observe que a solução de uma equação diferencial não é única, haverá “constantes de integração” arbitrárias, a segunda derivada $\frac{d^2h}{dt^2}$ na equação de queda livre principiou duas constantes, C_1 e C_2. Geralmente, um modelo matemático que abrange a taxa de mudança de uma variável com relação à outra é considerado uma equação diferencial.

1.3 Classificação

As equações diferenciais precisam ser classificadas considerando as seguintes particularidades:

a. O número de variáveis independentes;
b. O número de funções incógnitas;
c. A ordem da equação;
d. A estrutura da equação.

1.3.1 O número de variáveis independentes

No que se refere ao número de variáveis independentes, as equações diferenciais consiste se em ordinárias ou parciais. Para Yartey e Ribeiro (2017, p.11) "uma equação diferencial é ordinária (EDO) se a função incógnita for uma função de apenas uma variável". Nesta situação, as derivadas que surgem na equação diferencial são somente derivadas ordinárias, simples. Do contrário, as derivadas serão derivadas parciais e então, obteremos uma equação diferencial parcial (EDP).

Exemplo 1.2:

a. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5e^{3x} = -3x$ (é uma equação diferencial ordinária).

b. $\frac{\partial u}{\partial u} - \frac{\partial u}{\partial x} = x^2t^2$ (é uma equação diferencial parcial).

c. $u_t + uu_x = 0$ (é uma equação diferencial parcial).

1.3.2 O número de funções incógnitas

Caso o problema abranger só uma função incógnita, então teremos somente uma equação diferencial, sendo possível ser ordinária ou parcial. Caso, de outro modo, o problema implicar mais de uma função incógnita, por conseguinte obteremos um sistema de equações diferenciais.

Exemplo 1.3: x(t) e y(t) são funções incógnitas de um sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

1.3.3 A ordem da equação

A ordem de uma equação diferencial é a derivada de maior grau que aparece na equação.

Exemplo 1.4:

a. $y' = \cos x$ (equação diferencial ordinária de primeira ordem).

b. $y'' + 4y = e^x$ (equação diferencial ordinária de segunda ordem).

c. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (equação diferencial parcial de segunda ordem).

1.3.4 A estrutura da equação

Com relação à estrutura de uma equação diferencial, ela pode ser classificada em linear ou não linear. De acordo com Yartey e Ribeiro (2017, p.11) “ela é linear quando a incógnita e suas derivadas aparecem de forma linear na equação”.

A estrutura abaixo demonstra como pode ser escrita uma equação diferencial linear de ordem n:

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = g(x)$$

Veja como são definidas as duas propriedades das equações diferenciais lineares:

a. A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau: isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.
b. Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Exemplo 1.5:

a. $\frac{d^2y}{dt^2} + y^3 = 0$ (é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear por causa do termo y^3).

b. $y'' - 2y' + y = 0$ (é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem linear).

c. $yy'' - 2y' = x$ (é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear por causa do termo y que acompanha y”).

1.4 Soluções e problemas de valor inicial

Segundo Nagle *et. all.* (2012, p.05) “uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma igualdade que relaciona a variável independente à n-ésima derivada (e em geral também às derivadas de ordem inferior) da variável dependente”.

Exemplo 1.5:

a) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x^2$ (segunda ordem, x independente, y dependente).

b) $\sqrt{1 - \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)} - y = 0$ (segunda ordem, t independente, y dependente).

c) $\frac{d^4x}{dt^4} = xt$ (quarta ordem, t independente, x dependente).

Dessa maneira pode ser expressa uma forma geral para uma equação de ordem n com x independente, y dependente:

1. $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)$ no qual F é uma função que depende de x, y e as derivadas de y até a ordem n; isto é, depende de $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$. Sabemos que utiliza se a equação para todo x no intervalo aberto I ($a < x < b$, onde a ou b tornaria se infinitos). Em várias situações, separamos o termo de mais alta ordem $\frac{d^ny}{dx^n}$ e podemos transcrever a equação (1) dessa forma:

2. $\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$, geralmente é mais aconselhável a (1) por ser mais adequada para estudos científicos e tecnológicos.

Segundo Nagle *et. all.* (2012, p.06), “a função φ(x) que, quando substituída por y na equação (1) (ou (2)) satisfaz a equação para x no intervalo I, é chamada de solução explícita para a (ou da) equação em I”.

Exemplo 1.6:

Demostre que $\varphi(x) = x^2 - x^{-1}$ é uma solução explícita para a equação linear.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2}y = 0$$

Porém, $\Psi(x) = x^3$ não é.

Solução:

As funções $\varphi(x) = x^2 - x^{-1}$, $\varphi'(x) = 2x - x^{-2}$ e $\varphi(x)" = 2 - 2x^{-3}$são determinadas para todo x$\neq 0$. A substituição de $\varphi(x)$ por y na equação diferencial fornece:

$$(2 - 2x^{-3}) - \frac{2}{x^2}(x^2 - x^{-1}) = (2 - 2x^{-3}) - (2 - 2x^{-3}) = 0$$

Desse modo é adequado para todo x$\neq 0$, a função $\varphi(x) = x^2 - x^{-1}$ é uma solução explicita para (3) em $(-\infty, 0)$ e da mesma forma em (0,∞).

No entanto, para $\Psi(x) = x^3$,temos $\Psi'(x) = 3x^2$, $\Psi"(x) = 6x$, e a substituição na equação diferencial fornece:

$$6x - \frac{2}{x^2}x^3 = 4x = 0$$

que é adequado apenas no ponto $x = 0$ e não em um intervalo. Portanto, Ψ(x) não é um resultado.

Exemplo 1.7:

Dada a função $\varphi\,(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ demostre que, para toda escolha das constantes, C_1 e C_2 é uma solução explícita para a equação linear seguinte.

$$y" - y' - 2y = 0$$

Solução:

Ao calcular as derivdas $\varphi'\,(x) = C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x}$ e $\varphi"\, x = C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x}$. A substituição de φ, φ' e $\varphi"$ por y,y’,y” fornece

$$(C_1e^{-x}+4C_2e^{2x}) - (-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}) - 2(C_1e^{-x}+C_2e^{2x}) = 0$$
$$(C_1+C_1-2C_1)\,e^{-x} + (4C_2-2C_2-2C_2)\,e^{2x} = 0$$

Dado que a igualdade permanece para qualquer x em $(-\infty,\infty)$, logo φ x $= C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ é uma solução explícita no intervalo $(-\infty,\infty)$ levando em conta qualquer escolha das constantes C_1 e C_2 .

Os critérios para resolver equações diferenciais nem sempre constituem uma solução explícita para a equação. Nos casos em que não é possível uma solução explícita há de se aceitar uma solução definida implicitamente.

Nagle *et. all.* (2012, p.07) afirmam que “uma relação G(x, y) = 0 é considerada uma solução implícita para a (ou da) equação (1) no intervalo I se definir uma ou mais soluções explícitas em I”.

Como consequência, traz-se a definição de um problema de valor inicial para uma equação diferencial de ordem n,

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

Isto significa dizer que devemos encontrar uma solução para a equação diferencial em um intervalo I que satisfaça em x_0 as n condições iniciais

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0\ , \\ \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1, \\ \frac{d^2y}{dx^2}(x_0) = y_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1}, \end{gathered}$$

onde $x_0\ e\ I$ e $y_0\ ,y_1,\cdots,y_{n-1}$ são constantes dadas.

Exemplo 1.8:

Conforme demonstrado no exemplo 1.7, a função φ(x) $= C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ é uma solução explícita para a equação linear abaixo.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

para qualquer escolha das constantes C_1 e C_2. Determine C_1 e C_2 de modo que as condições iniciais sejam satisfeitas.

$$y(0) = 2 \ e \ \frac{dy}{dx}(0) = -3$$

Solução:

Ao calcular $\frac{d\emptyset}{dx}$ chega-se $\frac{d\emptyset}{dx} = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x}$. Substituindo as condições iniciais, obtém o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \emptyset(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = 2 \\ \frac{d\emptyset}{dx} = -C_1e^0 + 2C_2e^0 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 + 2C_2 = -3 \end{cases}$$

O acréscimo das duas últimas equações gera 3C_2= - 1, de modo que C_2= - $\frac{1}{3}$.

Como $C_1 + C_2 = 2$, encontramos $C_1 = \frac{7}{3}$. Logo a solução para o problema de valor inicial é:

$$\emptyset(x) = \frac{7}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}$$

1.5 Equações diferenciais de primeira ordem

Para Yartey e Ribeiro (2017, p.8) uma equação diferencial de que possui derivadas apenas de primeira ordem, ou seja $y' = \frac{dy}{dx}$, provavelmente y será alguma função de x, ou seja, é uma equação do tipo F(x, y, y′) = 0 ou y′ = f (x, y).

Exemplo 1.9:

1) $y' = cosx$

2)$xy' + 4xy$

Por serem vistas como EDOs mais simples, são chamadas de equações de primeira ordem, por causa do fato de compreenderem somente a derivada primeira da função desconhecida, deixando à parte as derivadas de ordem superior.

1.5.1 Equações Separáveis

Para Nagle, Saff e Snider, (2012, p.28) “equações separáveis é uma classe simples de equações diferenciais de primeira ordem que pode ser resolvida usando a integração”. Deste modo:

> *1)* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
> que podem reescrevê-las de modo a separar as variáveis x e y (juntamente com seus diferenciais dx e dy) em lados distintos da equação, como em:
> $$h(y)dy = g(x)dx$$
> Desta maneira, o lado direito legítimo f (x, y) precisa ter a forma fatorada: $f(x, y) = g(x).\frac{1}{h(y)}$. De jeito mais preciso, formulamos $p(y) = \frac{1}{h(y)}$ e demonstramos o conceito ao lado. Melhor dizendo, uma equação de primeira ordem é separável se tiver condições de ser escrita assim: $\frac{dy}{dx} = g(x)p(y)$. (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012, p.28).

Exemplo 1.10: A equação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + xy}{y^2 + 1}$$

é separável, uma vez que:

$$\frac{2x + xy}{y^2 + 1} = x\frac{2 + y}{y^2 + 1} = g(x)p(y)$$

Exemplo 1.11: A equação:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy$$

jamais permite a fatoração do lado direito e, por isto, não é separável.

1.5.1.1 *Método para solução de equações separáveis*

Para resolver a equação:

> 2) $\frac{dy}{dx} = g(x)p(y) \rightarrow dy = g(x)p(x)dx \rightarrow \frac{dy}{p(y)} = g(x)dx$
>
> Estabelecendo a troca $h(y) = \frac{1}{h(y)}$, com a finalidade de obter:
> $$h(y)dy = g(x)dx$$
> $$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$
> Integrando os dois membros:
> $$\text{H(y)} + C_1 = \text{G(x)} + C_2$$
> $$\text{H(y)} = \text{G(x)} + \text{C}, \quad \text{C} = C_2 - C_1$$

> onde adicionamos as duas constantes de integração em um só símbolo C. A última equação proporciona uma solução implícita para a equação diferencial. (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012, p.29).

Exemplo 1.12: Resolva a equação não linear:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2}$$

Solução:

Isolando as incógnitas e integrando ambos os lados, obtemos:

$$y^2 dy = (x-5)dx$$

$$\int y^2 dy = \int (x-5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

Solucionado para y, obtemos:

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + 3C\right)^{\frac{1}{3}}$$

Como C é uma constante de integração que é um número real, 3C também é um número real. Trocando 3C pelo único símbolo K, temos então:

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + K\right)^{\frac{1}{3}}$$

Caso precisarmos considerar o hábito de possibilitar que C represente uma constante arbitrária, podemos seguir um passo a frente e utilizar C em lugar de K no resultado final.

- de maneira informal, solucionam-se equações separáveis fazendo a separação e em seguida a integração de cada membro da equação;
- equações separáveis encontra-se entre as mais fáceis de serem resolvidas.

1.5.2 Equações Lineares

Para Nagle *et. all.* (2012, p.35 e p.36),

> Um tipo de equação diferencial de primeira ordem que ocorre com frequência nas aplicações é a equação linear. Uma equação linear de primeira ordem é uma equação que pode ser expressa na forma: $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_o(x)y = b(x)$ (I). Onde $a_1(x)$, $a_o(x)$ e $b(x)$ dependem somente da variável independente x, e não de y.

Portanto, apresenta o exemplo seguinte sobre equação linear.

Exemplo 1.13

A equação

$$x^2 senx - (cosx)y = senx\,\frac{dy}{dx}$$

é linear, pois pode ser reescrita na forma

$$senx\,\frac{dy}{dx} + (cosx)y = x^2 senx$$

Porém, a equação

$$y\frac{dy}{dx} + (senx)y^3 = e^x + 1$$

não é linear; ela não pode ser colocada na forma da equação (I) por causa da presença dos termos y^3 e $y\frac{dy}{dx}$.

Há duas situações para as quais a solução de uma equação diferencial linear é bastante imediata. A primeira surge se o coeficiente a_0 for identicamente zero, pois então a equação (I) se reduz a:

$$\textbf{(2)}\ a_1(x)\frac{dy}{dx} = b$$

que é equivalente a $y(x) = \int \frac{b(x)}{a_1(x)}dx + C$ *, (desde que* a_1 *seja diferente de zero)*

A segunda é menos trivial. Observe que, se $a_o(x)$ for igual a derivada de $a_1(x)$, ou seja $a_o(x) = a_1{}'(x)$, então os dois termos no lado esquerdo da equação (I) simplesmente compreendem a derivada do produto $a_1(x)y$:

$$a_1(x)y' + a_o(x)y = a_1(x)y' + a_1'(x)y = \frac{d}{dx}[a_1(x)y]$$

Portanto, a equação (1), torna-se:

$$\textbf{(3)}\ \frac{d}{dx}[a_1(x)y] = b(x)$$

E a solução novamente será:

$$a_1(x)y = \int b(x)dx + C \qquad \rightarrow y = \frac{1}{a_1(x)}(\int b(x)dx + C)$$

$$(4)\ \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $Q(x) = \frac{b(x)}{a_1(x)}$.

A próxima etapa consiste em determinar μ(x) de modo que ambos os membros da equação sejam multiplicados pelo fator integrante.

$$(\mathbf{5})\ \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

seja apenas uma derivada do produto $\mu(x)y$:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \boldsymbol{\mu(x)P(x)y} = \frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \boldsymbol{\mu'(x)}y$$

Claramente, isso exige que μ satisfaça a

$$(\mathbf{6})\ \mu' = \mu P$$

Nagle et. all (2012 ,p.37) afirma que “para encontrar tal função, reconhecemos que a equação (6) é uma equação diferencial separável, que podemos escrever como $\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x) \quad \rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$. Integrando os dois lados”, temos:

$$\mathbf{7})\ \ln(\mu) = \int P(x)dx \quad \rightarrow \quad e^{\ln(\mu)} = e^{\int P(x)dx} \quad \rightarrow \boldsymbol{\mu(x) = e^{\int P(x)dx}}$$

Com essa escolha para $\mu(x)$, a equação (5) torna-se:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x)$$

que tem a solução.

$$(\mathbf{8})\ y(x) = \frac{1}{\mu(x)}[\int \mu(x)Q(x)dx + C]$$

1.5.2.1 Resumo do Método

A equação diferencial linear de primeira ordem

$$y' + p(x)y = q(x)$$

admite um fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ e sua solução geral é

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x).e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

Exemplo 1.13**:** Encontre a solução geral para:

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = xcosx, \quad x > 0$$

Solução:

Para colocar essa equação linear na forma padrão, multiplicamos por x para obter:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2cosx$$

Aqui, $P(x) = -\frac{2}{x}$, de modo que:

$$\int P(x)dx = \int -\frac{2}{x}dx = -2\int \frac{1}{x}dx = -2lnx = lnx^{-2}$$

Assim, um fator integrante é: $\mu(x) = e^{lnx^{-2}} \quad \rightarrow \quad \mu(x) = x^{-2}$

Ao multiplicando a EDO inicial pelo fator integrante *μ(x)*, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2cosx \qquad (x^{-2})$$

$$\underbrace{x^{-2}\frac{dy}{dx} - 2x^{-3}y} = cosx$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-2}y) = cosx$$

Agora, integramos os dois lados e resolvemos para y, para encontrar:

$$x^{-2}y = \int cosx\,dx \qquad \rightarrow x^{-2}y = senx + C$$

$$y = \frac{senx + C}{x^{-2}} \qquad \rightarrow \quad y = x^2senx + Cx^2$$

Pode-se verificar facilmente se essa solução é válida para todo x > 0.

1.5.3 Equação de Bernoulli

Para Zill e Cullen (2001, p.70),

> Uma equação de primeira ordem que pode ser escrita na forma: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ (I). Onde $P(x)$ e $Q(x)$ são contínuos em um intervalor $(a,\ b)$ e n é um número real é chamando de **equação de Bernoulli.** Observe que, quando n = 0 ou 1, a Equação (I) também é uma equação linear e pode ser resolvida pelo método discutido anterior. Para outros valores de n, a substituição: $v = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli em uma equação linear, como mostramos agora. Dividindo a Equação (I) por y^n obtemos: $y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$ (II) Considerando $v = y^{1-n}$, descobrimos pela regra da cadeia que: $\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ E, portanto a equação (II) torna-se: $\left(\frac{1}{1-n}\right)\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$ Como $\frac{1}{1-n}$ é apenas uma constante, a última equação realmente é linear.

Exemplo 1.14

Resolva:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

Solução:

Esta é uma equação de Bernoulli com $n = 2$, $P(x) = \frac{1}{\mathrm{x}}$ e $Q(x) = x$. Para transformá-la em uma equação linear, primeiro dividimos por y^2 para obter:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

Em seguida, fazemos a substituição $v = y^{-1}$. Como $\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$ ou $-\frac{dv}{dx} = y^{-2}\frac{dy}{dx}$ a equação transformada é:

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = x \qquad \rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -x$$

A Equação anterior é linear, de modo que podemos resolvê-la para v usando o método discutido anteriormente. Quando fazemos isso, temos: $P(x) = -\frac{1}{x}$ e o fator integrante será:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-lnx} = e^{lnx^{-1}} = x^{-1}$$

Multiplicando a <u>EDO</u> pelo fator integrante:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -x \qquad .(x^{-1})$$

$$\underbrace{x^{-1}\frac{dv}{dx} - x^{-2}v} = -1$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}v] = -1$$

Integrando a equação:

$$x^{-1}v = \int -1dx \qquad \rightarrow \; x^{-1}v = -x + C$$

Ao multiplicar a equação anterior por x, temos:

$$v = -x^2 + Cx$$

Substituindo $v = y^{-1}$, obtemos a solução.

$$y^{-1} = -x^2 + Cx$$

1.5.4. Função Homogênea

Esta seção está embasada nas obras dos autores Nagle et all (2012), Yartey e Ribeiro (2017) e Zill e Cullen (2001) todos concordam com a conceituação dada para equações homogêneas e apresentam vários exemplos em comum.

Para Zill e Cullen (2001, p. 68), uma função $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau n se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y), \quad \forall (x, y) \in A$$

A função $f(x, y) = \frac{x+y}{y}$ é homogênea de grau zero.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda y}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(x + y)}{\lambda y}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 \frac{x + y}{y}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$$

1.5.4.1 Equação Diferencial Homogênea

Uma equação diferencial ordinária que pode ser escrita da seguinte forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é denominada homogênea quando $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogêneas de mesmo grau.

Exemplo 1.15

A *edo*:

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

é homogênea de grau 2.

Veja que:

$$x^2 - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

$M(x,y) = (x^2 - y^2)$ e $\mathrm{N}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 2xy$

- $M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2 = \lambda^2(x^2 - y^2) = \lambda^2 M(x,y)$
- $\mathrm{N}(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda x \lambda y = 2\lambda^2 xy = \lambda^2(2xy) = \lambda^2 \mathrm{N}(x,y)$

No exemplo abaixo a função não é homogênea, pois os graus dos dois termos são diferentes.

Exemplo 1.16

A *edo*:

$$x^2 + y^2 + (xy^2 + y^3)y' = 0$$

não é homogênea.

Note que:

$$x^2 + y^2 + (xy^2 + y^3)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x^2 + y^2)dx + (xy^2 + y^3)dy = 0$$

$M(x,y) = (x^2 + y^2)$ e $\mathrm{N(x,y)} = (xy^2 + y^3)$

- $M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2) = \lambda^2 M(x,y)$
- $N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x(\lambda y)^2 + (\lambda y)^3) = \lambda x \lambda^2 y^2 + \lambda^3 y^3 = \lambda^3 \mathrm{xy}^2 + \lambda^3 y^3$

  $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 (xy^2 + y^3) = \lambda^3 N(x,y)$

Seja $\mathrm{f}(x,y)$ homogênea de grau n. Fixemos $(x,y) \in Dominio(f)$ tal que $x \neq 0$, consideremos $\lambda = \frac{1}{x}$, temos:

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x^n} f(x,y) = \frac{f(x,y)}{x^n}$$

Vamos usar esta propriedade para resolver equações homogêneas.

1.5.4.2 Resolução de EDO's homogêneas:

Zill e Cullen (2001, p.55) assim como Nagle et all(2012, p.53) apresentam o método de solução abaixo parecidos.

Considere a *EDO:*

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

com M e N funções homogêneas de grau n.

Podemos reescrevê-la como:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{M(x,y)}{x^n}}{\frac{N(x,y)}{x^n}}$$

Usando o resultado anterior:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = \mathrm{F}\left(1, \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)$$

Isto é, o lado direito da equação é uma função que depende do quociente $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$.

Consideremos a mudança de variável:

$$v = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}, \text{ ou equivalentemente, } \mathrm{y} = vx$$

Derivando esta relação, temos:

$$dy = xdv + vdx$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

Logo,

$$\frac{dv}{dx}x + v = \frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M(1, v)}{N(1, v)}$$

Isto é, obtivemos a *edo* de variáveis separáveis:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\mathrm{x}}\left(\frac{M(1, v)}{N(1, v)} + v\right)$$

Exemplo 1.15

Resolva a *edo*:

$$x^2 - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

Solução:

Seja a *edo:*

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

Como visto anteriormente a equação é homogênea de grau 2.

$M(x, y) = (x^2 - y^2)$ e $\mathrm{N(x, y)} = 2xy$

- $M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2 = \lambda^2(x^2 - y^2) = \lambda^2 M(x, y)$
- $\mathrm{N}(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda x \lambda y = 2\lambda^2 xy = \lambda^2(2xy) = \lambda^2 \mathrm{N}(x, y)$

Utilizando a substituição: $\mathrm{y} = vx \rightarrow dy = xdv + vdx$.

Substituindo na *edo:*

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

$$(x^2 - (vx)^2)dx + 2x(vx)(xdv + vdx) = 0$$

$$(x^2 - v^2x^2)dx + 2x^2v(xdv + vdx) = 0$$

$$x^2dx - v^2x^2dx + 2x^3vdv + 2x^2v^2dx = 0$$

$$(x^2 + 2x^2v^2 - v^2x^2)dx + 2x^3vdv = 0$$

$$x^2(1 + 2v^2 - v^2)dx + 2x^3vdv = 0 \quad (: 2x^3)$$

$$\frac{x^2(1 + v^2)}{2x^3}dx + \frac{2x^3v}{2x^3}dv = 0$$

$$\frac{(1 + v^2)}{2x}dx + vdv = 0 \qquad (: (1 + v^2))$$

$$\frac{dx}{2x} + \frac{v}{(1 + v^2)}dv = 0 \qquad \text{(Equação de Variáveis Separáveis)}$$

$$\frac{v}{(1 + v^2)}dv = -\frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{v}{(1 + v^2)}dv = \int -\frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{v}{(1 + v^2)}dv = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

Resolvendo $\int \frac{v}{(1+v^2)}dv$:

$$u = 1 + v^2 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dv} = 2v \quad \rightarrow \quad du = 2vdv \quad \rightarrow \quad \frac{du}{2} = vdv$$

$$\int \frac{v}{(1 + v^2)}dv = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(1 + v^2)$$

Assim:

$$\int \frac{v}{(1 + v^2)}dv = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln(1 + v^2) + c_1 = -\frac{1}{2}\ln(\mathrm{x}) + \mathrm{c}_2 \qquad (.2)$$

$$\ln(1 + v^2) + \ln(\mathrm{x}) = C, \quad tal\ que\ C = 2c_2 - 2c_1$$

Como y $= vx \quad \rightarrow \quad v = \frac{y}{x}$, então:

$$\ln\left(1 + (\frac{y}{x})^2\right) + \ln(x) = C \qquad \rightarrow \qquad \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + lnx = C$$

$$\ln\left(\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right).x\right) = \mathrm{C} \quad \rightarrow \quad \ln(\frac{x^2+y^2}{x}) = \mathrm{C}$$

$$e^{\ln(\frac{x^2+y^2}{x})} = e^C \quad \rightarrow \frac{x^2+y^2}{x} = \mathrm{K}$$

1.5.5 Equações Exatas

Uma família de curvas $f(x,y) = c$, onde $\boldsymbol{c}$ é uma constante e f uma função diferenciável. Vimos do Cálculo que a diferencial total de f é:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Disto segue que se $f(x,y) = c$, então $df = 0$.

Considerando f uma função diferenciável, a uma família de curvas $f(x,y) = c$ sempre corresponderá uma equação diferencial do tipo $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$.

Yartey e Ribeiro (2017, p.40) definem equações exatas:

> A equação diferencial escrita na forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (I) é exata se existe uma função $F(x,y)$tal que: $dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ (II). Observação 1: Segue da definição que se $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata, então por (I) e (II) , existe uma função $F(x,y)$ tal que: $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ e $F(x,y) = c$ é a solução geral da equação (I).

1.5.5.1 Método de solução

Antes de apresentar o método de solução, deve-se analisar questões importantes com relação às equações exatas:

1. Existe uma maneira de testar se uma equação é exata ou não?
2. Se uma equação é exata, como poderemos achar sua solução geral, isto é, como poderemos encontrar uma função $F(x,y)$ tal que F satisfaz a equação exata e $F(x,y) = c$ é a solução geral?
3. Se uma equação não é exata, é possível modificá-la para torná-la exata?

1.5.5.2 Determinação da solução geral

Yartey e Ribeiro (2017, p.42 e 43) ainda afirmam que:

> Se a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata, queremos determinar uma função $F(x,y)$ tal que: $dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ com, $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$ (IV). Integrando a primeira equação de (IV) em relação a x, obtém: $\int \frac{\partial F}{\partial x} dx = \int M(x,y)dx \iff F(x,y) = \int M(x,y)dx + k(y)$ onde $k(y)$ é uma constante de integração quando se integra em relação a x. Para determinar $k(y)$, derivamos a função F em relação a y e igualamos a N, como na equação (IV): $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx) + k'(y) \iff k'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx)$. Esta última equação determina a função $k(y)$.

Exemplo 1.16

Resolva a *edo:*

$$(1 + e^x y + xe^x y)dx + (xe^x + 2)dy = 0$$

Solução:

<u>1º Passo</u>: Verificar se a *edo* é exata:

Veja que $M(x,y) = 1 + e^x y + xe^x y$ e $N(x,y) = xe^x + 2$. Como:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = e^x + xe^x \\ \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = (xe^x)' = e^x + xe^x \end{array}\right. \quad \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y),$$ logo a *edo* é <u>exata</u>.

<u>2º Passo</u>: Integrar a função $M(x,y) = 1 + e^x y + xe^x y$ em relação a x:

$$F(x,y) = \int (1 + e^x y + xe^x y)dx \quad \rightarrow F(x,y) = \int 1dx + y\int e^x dx + y\int xe^x dx$$

Resolvendo $\int xe^x dx$ (por partes):

$$u = x \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \quad \rightarrow du = dx$$

$dv = e^x \qquad \rightarrow \int dv = \int e^x dx \quad \rightarrow \ v = e^x$

Logo, $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx \qquad \rightarrow \int xe^x dx = xe^x - e^x$

Assim,

$$F(x,y) = x + ye^x + y(xe^x - e^x) + k(y) \quad \rightarrow F(x,y) = x + ye^x + yxe^x - ye^x + k(y)$$

$$F(x,y) = x + yxe^x + k(y)$$

<u>3º Passo</u>: Derivar $F(x,y)$ parcialmente em relação a y e em seguida igualar a $N(x,y)$:

$$F(x,y) = x + yxe^x + k(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = xe^x + k'(y) \quad \rightarrow xe^x + k'(y) = N(x,y)$$

$$xe^x + k'(y) = xe^x + 2 \qquad \rightarrow k'(y) = 2$$

<u>4º Passo</u>: Determinar o valor de $k'(y)$ e consequentemente a solução da *edo*

$$\int k'(y)dy = \int 2dy \qquad \rightarrow \quad k(y) = 2y + C$$

A solução da *edo* é dada por:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + k(y) \qquad \rightarrow F(x,y) = x + yxe^x + 2y + C$$

Ou simplesmente,

$$x + yxe^x + 2y = C$$

E se tivéssemos escolhido $N(x,y)$ no segundo passo, chegaríamos na mesma solução?

Dada a *edo* $(1 + e^x y + xe^x y)dx + (xe^x + 2)dy = 0$:

<u>2º Passo</u>: Integrar a função $N(x,y) = xe^x + 2$ em relação a y:

$$F(x,y) = \int (xe^x + 2)dy \quad \rightarrow F(x,y) = \int xe^x dy \ + \int 2dy$$

$$F(x,y) = xe^x \int dy \;\; + 2\int dy \qquad \rightarrow F(x,y) = xe^x y + 2y + k(x)$$

<u>3º Passo</u>: Derivar $F(x,y)$ parcialmente em relação a x e em seguida igualar a $M(x,y)$:

$$F(x,y) = xe^x y + 2y + k(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = ye^x + xye^x + k'(x) \quad \rightarrow ye^x + xye^x + k'(x) = M(x,y)$$

$$ye^x + xye^x + k'(x) = 1 + e^x y + xe^x y \quad \rightarrow k'(x) = 1$$

<u>4º Passo</u>: Determinar o valor de $k'(x)$ e consequentemente a solução da *edo*

$$\int k'(x)dx = \int 1dx \qquad \rightarrow \quad k(x) = x + C$$

A solução da *edo* é dada por:

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + k(x) \quad \rightarrow F(x,y) = xe^x y + 2y + x + C$$

Ou simplesmente,

$$xe^x y + 2y + x = C \qquad \rightarrow y(xe^x + 2) = C - x$$

$$y = \frac{C - x}{xe^x + 2}$$

1.5.5.3 Resumo do método

Para resolver *EDO's* exatas expressas sob $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, procede-se da seguinte forma:

1º) Verifica se a *edo* é exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

2º) Se escolher $M(x,y)$ integra na variável x, gerando uma constante $k(y)$.

(De modo análogo, se escolher $N(x,y)$ integra na variável y, gerando uma constante $k(x)$).

3º) Deriva parcialmente em relação a y o resultado obtido integrando $M(x,y)$, em seguida iguala este resultado a $N(x,y)$. (De modo análogo, deriva parcialmente em relação a x o resultado obtido integrando $N(x,y)$, em seguida iguala este resultado a $M(x,y)$).

4º) Determina-se o valor de $k'(y)$ e consequentemente a solução da *edo.* (De modo análogo, determina-se o valor de $k'(x)$ e consequentemente a solução da *edo.*

1.6 Aplicações de EDO's de primeira ordem

Nesta seção vamos analisar a modelagem de alguns fenômenos. Kreyszig (2008, p.2) afirma que o computador pode ajuda a obter as soluções dos problemas de equações diferenciais, porém dificilmente ajudará a elaborar os respectivos modelos.

Segundo Yartey e Ribeiro (2017, p.66),

> Modelagem é o processo de escrever uma equação diferencial para descrever uma situação física. Muitos fenômenos em ciência e engenharia envolvem relações entre quantidades que variam com o tempo. E como taxas de variações são representadas matematicamente por derivadas, tais fenômenos podem ser modelados por equações que envolvem derivadas.

Sendo assim, apresentaremos dois exemplos de modelagem, aplicações baseadas em equações diferenciais de primeira ordem, pelos quais esses problemas nos darão uma primeira impressão sobre modelagem.

1.6.1 Problema de variação de temperatura

No exemplo abaixo, pergunta-se a hora que ocorreu o assassinato, considerado a temperatura do corpo.

Exemplo 1.17:

Em um dia de outono na cidade de Estocolmo os termômetros marcavam 16ºC. O detetive Jason chegou à cena do crime e encontrou o sargento inclinado sobre o corpo. O sargento disse que havia vários suspeitos. Se eles soubessem a hora exata da morte, então poderiam reduzir a lista. O detetive Taylor apanhou um termômetro e mediu a temperatura do corpo: 34,5ºC. Depois, saiu para almoçar. Ao retornar às 13h, descobriu que a temperatura do corpo era 33,7ºC. Quando ocorreu o assassinato? [Dica: a temperatura normal do corpo é 37ºC].

Solução:

$T_A = 16 \quad T(0) = 34{,}5°C \qquad T(13) = 33{,}7°C$

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_a) \to \frac{dT}{dt} = K(T - 16) \to \frac{dT}{T-16} = Kdt \to \int \frac{1}{T-16}dt \to \int kdt$$

$$e^{ln}|T - 16| \to e^{kt+c} \to \text{T} = 16 + \text{C}e^{kt} \to T - 16 = e^{kt}.e^{C}$$

$$T - 16 = Ce^{kt} \to T = 16 + Ce^{kt}$$

Para t = 0 temos:

$$T(t) = 16 + Ce^{Kt} = 34{,}5 \to T(0) = 16 + Ce^{K.(0)} = 34{,}5 \to 16 + \text{C} = 34{,}5$$

$$\text{C} = 34{,}5 - 16 \to \text{C} = 18{,}5$$

Substituindo a constante na EDO e aplicando a condição de contorno:

$$T(t) = 16 + 18{,}5e^{kt} \to T(13) = 16 + 18{,}5e^{13k} \to 18{,}5e^{13k} + 16 = 33{,}7$$

$$18{,}5e^{13k} = 17{,}7 \to e^{13k} = \frac{17{,}7}{18{,}5} \to lne^{13k} = \ln(0{,}9568) \to k = \frac{-0{,}04417}{13}$$

$$k \cong = -0{,}0034$$

Ao aplicar o valor de k na EDO e substituir a função por 37°, tem-se:

$$T(t) = 16 + 18{,}5e^{kt} \to \ T(t) = 16 + 18{,}5e^{-0{,}0034t} \to \ 16 + 18{,}5e^{-0{,}0034t} = 37$$

$$18{,}5e^{-0{,}0034t} = 37 - 16 \quad \to 18{,}5e^{-0{,}0034t} = 21 \to \ e^{-0{,}0034t} = \frac{21}{18{,}5}$$

$$-0{,}0034t = \ln(1{,}135135) \to t = \frac{0{,}1268}{-0{,}0034} \to t \cong \ -37{,}294$$

O crime ocorreu há um pouco mais de 37 minutos antes do corpo ser encontrado.

1.6.2 Radioatividade

Segundo Kreyszig (2008, p. 7) ”meia-vida de uma substância radioativa é o tempo em que a metade de uma determinada quantidade dessa substância desaparece. Dessa forma, ela mede a rapidez do seu decaimento”

Exemplo 1.1.18:

Neste exemplo procura-se responder qual é a idade do fóssil, considerando que a meia vida do carbono 14 é de 5730 anos.

Em setembro de 1988, foi encontrado nas margens do rio Yuribeite-Yakha (norte da União Soviética), um fóssil de filhote de mamute. Na análise de laboratório, mostrou traços de carbono 14 correspondente a $0{,}382.10^{-2}$ dos valores que teria em vida. Utilize equações diferenciais para determinar a idade do fóssil. (A meia vida do 14C é 5730 anos).

Solução:

Dada a equação diferencial:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{kQ}{1} \rightarrow dQ = kQ.dt \rightarrow \frac{dQ}{Q} = Kdt \rightarrow \int \frac{dQ}{Q} = \int Kdt$$

$$e^{\ln|Q|} = e^{kt+c_1} \rightarrow \; Q = e^{kt+C_1} \rightarrow \; Q = C.e^{kt}$$

Ao fazer $t = 0$.

$$Q = Ce^0 \rightarrow Q = C.1 \rightarrow Q = C$$

Considerando no instante t = 0, $Q = Q_0$:

$$Q_0 = C.e^{k.0} \rightarrow C = Q_0 \rightarrow C = Q_0 \text{ ou seja, } Q = Q_0 e^{kt}$$

Foi dado no problema que $t = 5730 \rightarrow Q = \frac{1}{2}\, Q_0 \; \{meia\ vida\}$

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{5730k} \; \rightarrow \; \frac{1}{2} = e^{5730k} \; \rightarrow ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{5730k}) \quad \rightarrow ln\ \left(\frac{1}{2}\right) = 5730k.\ln e$$

$$ln\left(\frac{1}{2}\right) = 5730\,k \rightarrow k = \frac{ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5730} \rightarrow k = -\,0{,}000121$$

Logo,

$$Q = Q_0 e^{-0{,}000121t}$$

Ao determinar a idade do fóssil temos:

$Q(t) = 0{,}382.10^{-2} Q_0$ e t = ? (Idade do fóssil).

$$0{,}382.10^{-2} Q_0 = Q_0 e^{-0.000121t}$$

$$ln(0{,}382.10^{-2}) = ln(e^{-0{,}000121t})$$

$$ln(0{,}382.\,10^{-2}) = -0{,}000121t$$

$$t = \frac{-5{,}567504856}{-0{,}000121} \rightarrow t \cong 46.012$$

O fóssil tem aproximadamente 46.000 mil anos.

As equações diferenciais de segunda ordem assim como as equações de ordem superiores serão suprimidas deste trabalho, no entanto para prosseguimento do estudo recomenda-se ler os autores citados anteriormente.

No próximo capítulo será formulado a ideia de modelagem matemática bem como suas definições e implicações.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo pretende-se abordar o aspecto histórico da modelagem matemática, e explorar elementos como definições, características e observações a cerca dessa área de estudo.

2.1 contexto histórico

Segundo Bassanezi (2002, p.15) "o objetivo da modelagem matemática é fazer o estudante ter gosto pela matemática". Desse modo, o interesse pela Matemática só é desenvolvido através de problemas do mundo real.

A matemática aplicada destina-se a aplicar o conhecimento matemático a outros fenômenos. Ela engloba otimização, bioinformática e biomatemática, criptografia, probabilidade e estatística, calculo numérico, teoria da informação, teoria dos jogos entre outros.

Compreender e utilizar de tais pressupostos é fundamental para pesquisadores, professores e alunos.

Para Brandt *et. all.* (2016, p.17),

> No contexto do ensino da Matemática no Brasil, a década de 1980 trouxe novas e promissoras perspectivas para o ensino dessa ciência. [...]. Essa, enquanto Matemática Aplicada ganhou espaço e notoriedade principalmente a partir da segunda guerra mundial, possivelmente por motivos militares e econômicos. Entretanto, compreendemos que ocorreram mudanças nessa maneira de conceder a Modelagem, notadamente no que diz respeito ao ensino e a aprendizagem da Matemática. Nesse sentido, pretende-se apresentar a Modelagem Matemática em outra perspectiva, diferente daquela oriunda da Matemática Aplicada, ou seja, entendendo-a como uma metodologia de ensino da Matemática e, mais particularmente, para a Educação Básica.

Para Souza, Silva e Mafra (2020, p.71),

> A modelagem matemática, consolidada no Brasil como estratégia pedagógica a partir de 1980, por meio dos esforços de professores como Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, busca auxiliar o aluno na resolução de situações do cotidiano, enfatizando a utilização de elementos matemáticos de forma dinâmica e participativa.

Para Bassanezi (2002, p.17), "a modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la". Com base em escritos do autor, as Ciências Biológicas, sustentada primeiramente nos padrões da Física e nas semelhanças decorrentes tornaram se gradativamente mais matematizadas. A partir disso, observa-se que a matemática tem sido suporte para modelar problemas genéticos, neurológicos, ecológicos, epidemiológico e populacionais.

Com os avanços tecnológicos e a utilização de computadores potentes a modelagem matemática tem migrado para a modelagem computacional tais implementações possibilitou um leque maior de aplicabilidade, chegando a áreas como a música, a linguística e a arte.

2.2 Aspectos Gerais

Para Bassanezi (2002, p.16), "A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

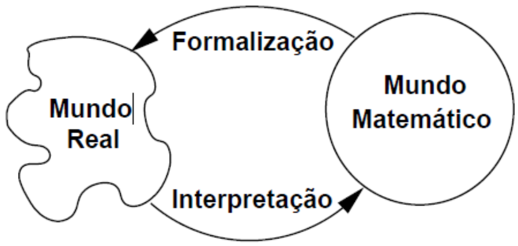


FIGURA 2: Esquema simplificado de modelagem matemática
FONTE: Bassanezi (2002, p.44).

Dessa forma, "entende-se que é possível quebrar a falsa dicotomia entre essa ciência e o cotidiano, criando uma intersecção na qual matemática e realidade interagem constantemente". (BUENO; LARA; LOPES, 2021, p.04)

Alguns autores definem modelagem matemática como uma metodologia para abstração, generalização, e previsão de tendências para uma finalidade especifica. Há um consenso que este é um processo não estático e em constante transformação cujo objetivo é a validação de modelos matemáticos.

2.3 Modelagem e Modelos

Para Bassanezi (2002, p.19), "quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmentos considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo”.

Conhecer sobre os modelos matemáticos é fundamental para que o pesquisador saiba qual caminho tomar na modelagem dos dados e consequentemente na pesquisa.

(i) Modelo Objeto

É definido como a representação de um fato real ou de um objeto, caracteriza-se pela homogeneidade e estabilidade das variáveis, em um sistema de equações diferenciais que modela fenômenos epidemiológicos é classificado como um modelo objeto, isso se deve ao fato de que o grupo de infectado é homogêneo e consequentemente gozam das mesmas propriedades.

Os elementos desse modelo podem ser exibidos de forma conceitual (quando empregada equações matemáticas), pictórica (quando utilizado desenho, mapas e outros), ou simbólica.

(ii) Modelo Teórico

São modelos relacionados a algum estudo/pesquisa existente, está sempre correlacionado a um modelo objeto e um código de interpretação. Caracteriza-se com o problema real, ou seja, contém as variáveis existentes no fenômeno e suas implicações com o sistema observado estão relacionadas através de hipóteses ou de experimentos.

(iii) Modelo Matemático

Para Bassanezi (2002, p.20) modelo matemático é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”.

De modo formal um modelo matemático é a ilustração de uma situação real a partir de uma representação conceitual. Na literatura existe três classificações para modelos matemáticos: a empírica, que se utiliza de dados experimentais, a fenomenológica, que se baseia em princípios básicos de conservação e em relações constitutivas, e a híbrida, que é a junção das duas teorias anteriores. A modelagem fenomenológica tem como principal característica a construção de processos iterativos e ajustes sucessivos.

Para Bassanezi (2002, p. 20), “a importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas”.

Contudo, os modelos matemáticos podem ainda ser classificados a partir de uma abordagem qualitativa, com base na natureza dos fenômenos que serão analisados ou classificado conforme o tipo da matemática empregada, sendo assim:

a) Linear ou não – linear: conforme linearidade das variáveis das equações;

b) Estático: quando não ocorrer mudanças significativas do fenômeno no decorrer do tempo.

c) Dinâmico: quando a mudança nos estágios do fenômeno no decorrer do tempo (esse caso é bastante empregado no estudo de equações diferenciais).

d) Estocástico: empregado na tentativa de descrever a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos.

e) Determinístico: baseia-se na hipótese que exista dados suficientes em um determinado instante, logo todo o futuro do sistema pode ser previsto precisamente.

f) Educacional: quando utilizado um número pequeno ou simples de suposições, o que geralmente provoca soluções analíticas.

Segundo Bassanezi (2002, p.24) Modelagem Matemática é

> Um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Conhecer o problema é fundamental, pois a partir desse pressuposto é possível identificar o modelo e traçar técnicas que solucione o problema. Contudo, é necessário estabelecer os caminhos e as etapas da modelagem matemática.

2.4 Etapas da Modelagem Matemática

Para Bassanezi (2011, p. 26), "A modelagem matemática de uma situação ou problema real deve seguir uma sequência de etapas". Compreender cada uma das etapas torna-se parte essencial para a modelagem de problemas matemáticos.

De modo simplificado o autor divide a modelagem nas seguintes etapas:

(I) Experimentação: Obtenção de dados, caracterizada por atividades laboratoriais.

(II) Abstração: Fase do processo que se objetiva por criar e formular modelos matemáticos. Nesta etapa, pretende-se estabelecer:

a) Determinação de variáveis – onde os valores variáveis que se trabalha são claramente definidos;

b) Problematização – consiste na formulação de um problema é a parte mais especifica da modelagem, o que deve ser resolvido;

c) Hipóteses – quais as possibilidades direcionam a investigação do pesquisador;

d) Simplificação – geralmente quando se observa fenômenos matemáticos eles se apresentam complexos, diminuir a dificuldade permite a modelagem.

(III) Resolução: Substituição das hipóteses expressas na linguagem natural por meio de uma linguagem matemática, é a obtenção da resposta;

(IV) Validação: Aceitação ou não do modelo obtido na fase de resolução;

(V) Modificação: Processo de revisão, está ligado a alguma variável no início do problema que influência e pode ocasionar a rejeição dos resultados e dos modelos.

Para Biembengut (2009) o processo de modelagem matemática é dividida em três etapas e seis subetapas:

> a) Interação, i) reconhecimento da situação-problema, ii) familiarização com o assunto a ser modelado → referencial teórico; b) Matematização, i) formulação do problema → hipótese, ii) resolução do problema em termos do modelo; c) Modelo matemático, i) interpretação da solução, ii) validação do modelo → avaliação (BIEMBENGUT, 2009, p. 13).

É notório que a modelagem matemática deve ser bem elaborada e executada para êxito na observação do fenômeno. Outros autores subdividem as etapas de forma diferente, no entanto eles convergem de modo geral nas etapas de: experimentação, abstração, resolução e validação.

2.5 A Modelagem Matemática como Instrumento Pedagógico

Conforme as Orientações Curriculares para o Ensino Médio nas áreas de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, “a modelagem matemática pode ser entendida como a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (Brasil, 2006, p. 84).

Com base nesse documento, pode-se inferir que é papel do professor utilizar-se de problemas do mundo real para o ensino do alunado. A seguir será abordado algumas ideias centrais da utilização da modelagem matemática como ferramenta pedagógica, bem como suas implicações na prática docente.

Sabe-se que a modelagem matemática é um processo ativo, ou seja, engloba educando e educador. Um modelo bem elaborado proporciona ao aluno a possibilidade de interagir com o objeto de estudo uma vez irão surgir diversas situações no decorrer do processo. Nesse contexto, o discente deixa de ser coadjuvante (observador) e passa a ser protagonista (construtor) no processo de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva constata-se que este recurso pedagógico é de grande valia, pois o processo de interação do educando proporciona a construção/reconstrução de competências e habilidades necessárias para o desenvolvimento intelectual/cognitivo do educando.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006, p. 85), a partir desse documento pode-se destacar algumas dessas competências:

- Selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir;
- Problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido;
- Formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa;
- Recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo;
- Validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes;
- E, eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda a situação real, aqui se revelando o aspecto dinâmico da construção do conhecimento.

A empregabilidade da modelagem matemática voltado ao ensino fundamental segundo ciclo está pautada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) (Brasil, 1998, p.48):

• Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;

• Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);

• Selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;

• Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;

• Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;

• Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;

• Sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;

• Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Na concepção de Burak (2004, p. 4),

> [...] Modelagem Matemática, como uma alternativa Metodológica para o ensino de Matemática, pretende contribuir para que gradativamente se vá superando o tratamento estanque e compartimentalizado que tem caracterizado o seu ensino, pois, na aplicação dessa metodologia, um conteúdo matemático pode se repetir várias vezes no transcorrer do conjunto das atividades em momentos e situações distintas. A oportunidade de um mesmo conteúdo poder ser abordado diversas vezes, no contexto de um tema e em situações distintas, favorecendo significativamente a compreensão das ideias fundamentais, pode contribuir de forma significativa para a percepção

> da importância da Matemática no cotidiano da vida de cada cidadão, seja ele ou não um matemático.

Para Burak (2004), a Modelagem Matemática possibilita ao aluno criar condições acerca do seu próprio aprendizado e consequentemente ela pode beneficiar todo o processo de ensino da Matemática. Para Burak e Klüber (2013, p. 5),

> Nesta forma de conceber a Modelagem Matemática, esse princípio pode favorecer a ação do estudante no delineamento, na busca de informações e coletas de dados e desenvolver autonomia para agir nas situações novas e desconhecidas. Pode, ainda, favorecer o desenvolvimento, no estudante, de uma atitude investigativa, na medida em que busca coletar, selecionar, e organizar os dados obtidos. O desenvolvimento desta atitude passa a se constituir em valor formativo que acompanhará o estudante, não somente no período de sua trajetória escolar, mas ao longo de toda sua vida.

Com base nos expostos acima, através da modelagem matemática há a formação cidadã do educando, haja visto que quando o educador se apropria desta metodologia tem-se os objetivos da disciplina inerente aos PCN's atendidos. Burak (2004) ainda ressalta, que quando o aluno busca informações e se empenha na coleta de dados isso pode ocasionar autonomia durante o processo de modelar.

Contudo, outro aspecto positivo do emprego da Modelagem Matemática na sala de aula, é o fato de que esta metodologia proporciona interação como diversas tendências no ensino da matemática, tais como: Etnomatemática e Resolução de Problemas.

3 MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS

Neste capítulo será abordado o contexto histórico das epidemias assim como será apresentado alguns conceitos teóricos. Na sequência será apresentado alguns modelos matemáticos que representam o comportamento de epidemiologias. Por fim, será utilizado os dados da Pandemia de Coronavírus (Covid-19) no município de Paracatu – MG, durante o período de abril de 2020 a fevereiro de 2021.

3.1 Contexto histórico

Sabe-se que as Epidemias estiveram inseridas na humanidade. Há relatos históricos na idade antiga de doenças que dizimaram dezenas de milhares de pessoas. Na baixa Idade Média e com o início do processo de urbanização há o surgimento de doenças que se espalharam rapidamente em um pequeno espaço de tempo, provocando grande quantidade de mortos.

Frequentemente o homem tenta obter meios para controle e previsão dessas doenças, esse tipo de doença que se alastra descontroladamente, é chamada de Epidemia.

Para Alonso (2004), a peste negra provocou um efeito devastador na Europa no período de 1347-1350, ocasionando um quarto de óbitos de toda a população. Estima-se que no ano de 1665, a peste bubônica produziu cerca de 70 mil mortes em Londres.

Na tentativa de controlar a peste negra:

> No século XIV foi instituída em alguns pontos italianos, a quarentena que consistia no isolamento de marinheiros provenientes de áreas endêmicas ou epidêmicas, durante 40 dias, antes de poderem penetrar nas cidades (BARATA, 1987, p.10).

Dentre as principais epidemias no mundo em todos os tempos destaca-se: a Peste Negra, a Cólera, a Febre Amarela, a Varíola, a Síndrome da Imunodeficiência Humana (HIV), Ebola e outras.

O Brasil não se diferencia do mundo quanto aos efeitos das epidemias. Um dos principais fatores ao elevado números de óbitos da população são as epidemias, sendo que em alguns casos estas doenças superam o número de mortes em guerra. Neste contexto, destacam-se a tuberculose, sarampo, malária, sífilis e gonorreia trazidas no processo de colonização pelos europeus, a varíola durante o período imperial, a febre amarela no início do período republicano, e mais recentemente o HIV, a dengue e a zica.

As epidemias surgem sem sabermos a origem, e os meios utilizados para controle de tais doenças podem gerar grandes desconforto a população. A Epidemiologia estuda os diversificados fatores que influenciam na difusão, modo de propagação de doenças, frequência, evolução, bem como os métodos de prevenção.

Segundo Gordis (2004), a prevenção está dividida em dois grupos, a primária e a secundária. A primária é utilizada na tentativa de coibir o desenvolvimento da doença em indivíduos ainda não infectado. Já a secundária caracteriza-se na tentativa de inibir indivíduos infectados de propagar a doença. A partir de observações cientistas afirmam que a prevenção primária é a mais eficiente e objetiva na prevenção de epidemias, sendo esta possível prevenir maior número de casos e eventualmente maior número de óbitos.

Como observado no capítulo anterior, o emprego da modelagem matemática para investigação de tais comportamentos é de fundamental importância, haja visto que a partir de tais informações gestores, médicos e cientistas podem tomar medidas preventivas adequadas e traçar estratégias eficientes de controle e proteção a propagação das doenças. Na sequência serão abordados alguns modelos matemáticos aplicados a epidemiologia.

3.2 Modelos Matemáticos

Para epidemiologia são utilizados alguns modelos matemáticos, tais que a população é subdividida em três partes: suscetíveis, infectados e removidos. Cada doença tem características próprias de infecção e transmissibilidade, ou seja, cada tipo há um modelo mais eficiente para a modelagem. No entanto, todas elas se assemelham no aspecto geral.

3.2.1 Modelo I

Proposto no século XVIII, pelo matemático Daniel Bernoulli, com o objetivo de analisar a disseminação de doenças infecciosas. É considerado o modelo mais simples utilizado em modelagem epidemiológica, ele considera apenas duas subpopulações.

Considera-se que dada uma população de P indivíduos infectados com a doença há N indivíduos não infectados, mas que podem ser infectados.

Sabe-se que a soma das duas subpopulações corresponde a 100%, logo pode inferir-se que $P + N = 1$.

O contágio da população ocorre pelo contato de indivíduos infectados e não infectados, logo a quantidade de contatos é proporcional ao produto de P por N. Assim, com o passar do tempo há variação do número de infectados, logo:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha NP, \qquad P(0) = P_0 \qquad (3.1)$$

como $N + P = 1$, então $N = 1 - P$, tem-se:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(1 - P)P \qquad (3.2)$$

Ao igualar a derivada a zero:

$$\alpha(1 - P)P = 0$$

Observa-se que os pontos críticos da equação (3.2) são $P = 0$ e $P = 1$, eles também são denominados pontos de equilíbrio do modelo.

Resolvendo (3.2):

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(1 - P)P$$

$$\frac{dP}{(1 - P)P} = \alpha dt \qquad (3.3)$$

Note que a equação (3.3) é de variáveis separáveis, logo:

$$\int \frac{dP}{(1 - P)P} = \int \alpha dt$$

Ao utilizar frações parciais para o primeiro membro, chega-se:

$$\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{(1 - P)} = \int \alpha dt$$

$\ln|P| - \ln|1 - P| = \alpha t + c$, tal que $c \in \mathbb{R}$

$$\ln(\frac{P}{1 - P}) = \alpha t + c$$

$$e^{\ln(\frac{P}{1-P})} = e^{\alpha t + c}$$

$$\frac{P}{1 - P} = e^{\alpha t + c}$$

Aplicando a condição de contorno inicial $P(0) = P_0$, tem-se:

$$P(t) = \frac{P_0}{P_0 + (1 - P_0)e^{-\alpha t}} \qquad (3.4)$$

3.2.2 Modelo II

Existem doenças que indivíduos não apresentam sintomas mesmos estando infectados, isso os torna disseminadores/portadores.

Seja P a subpopulação portadora da doença e N a subpopulação suscetível a se infectar. Este modelo irá considerar que indivíduos infectados serão removidos da população. Com isso, tem-se que com o passar do tempo a variação dos infectados é expressa por:

$$\frac{dP}{dt} = -\beta P \qquad (3.5)$$

No entanto, observa-se que a quantidade pessoas não infectadas suscetíveis a infecção é proporcional ao contato com indivíduos suscetíveis a infecção e aos infectados. Assim:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha NP \qquad (3.6)$$

Resolvendo a equação (3.5):

$$\frac{dP}{dt} = -\beta P$$

$$\frac{dP}{P} = -\beta dt \qquad (3.7)$$

Note que a equação (3.7) é de variáveis separáveis, logo:

$$\int \frac{dP}{P} = -\int \beta \, dt$$

$\ln|P| = -\beta t + c,$ tal que $c \in \mathbb{R}$

$$e^{lnP} = e^{-\beta t + c}$$

$P = e^c . e^{-\beta t},$ fazendo $e^c = K$

$$P = Ke^{-\beta t}$$

Aplicando a condição de contorno inicial $P(0) = P_0$, chega-se ao número de infectados no instante t:

$$P(t) = P_0 e^{-\beta t} \qquad (3.8)$$

Substituindo o resultado obtido em (3.8) na equação (3.6), tem-se:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N P_0 e^{-\beta t} \quad (3.9)$$

Percebe-se que a equação (3.9) é de variáveis separáveis, logo:

$$\frac{dN}{N} = \alpha P_0 e^{-\beta t}$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int \alpha P_0 e^{-\beta t}\, dt \qquad (3.10)$$

Ao resolver (3.10) e aplicar a condição de valor inicial $N(0) = N_0$, chega-se a:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha P_0 (e^{-\beta t - 1)}} \qquad (3.11)$$

Na epidemiologia há outros modelos matemáticos bastante aplicados que consideram outras variantes como: vacina, reinfecção, mortes e outros, nesse contexto pode-se destacar o modelo Suscetível- Infectado- Removido (SIR) e o modelo Suscetível-Infectado-Recuperado-Suscetível (SIRS).

O modelo SIR foi desenvolvido por Kermack e Mckendrick em 1927. Segundo Rocha (2012), o modelo SIR é empregado na modelagem de doenças infecciosas como: sarampo, rubéola, entre outras.

Em continuação aos estudos desenvolvidos anteriormente, em 1933 Kermack e Mckendrick propuseram o modelo SIRS para modelagem epidemiológica. “Este modelo é utilizado atualmente para estudar a dinâmica da infecção da gripe”, (ROCHA, 2012).

Para modelagem dos dados será utilizado os dois modelos iniciais.

3.3 Modelagem dos dados

Originário na China em dezembro de 2019, mais especificamente na província de Whuan, o Sars-CoV-2 (Covid 19) informalmente batizado de Coronavírus é um vírus que já provocou mais de 3,8 milhões de mortes em todo o mundo. Seus sintomas mais comuns são febres, tosse seca, cansaço, dor de garganta, dor de cabeça e outros, podendo vir a se desenvolver em casos clínicos de maior complexidade como pneumonia, trombose, derrame, entre outros. Como forma de prevenção, a Organização Mundial da Saúde (OMS), recomenda lavar as mãos com água e sabão ou higienizar com álcool sempre que possível, usar máscara de proteção ao sair de casa, manter distanciamento de um metro e meio de outras pessoas em locais públicos, e etc.

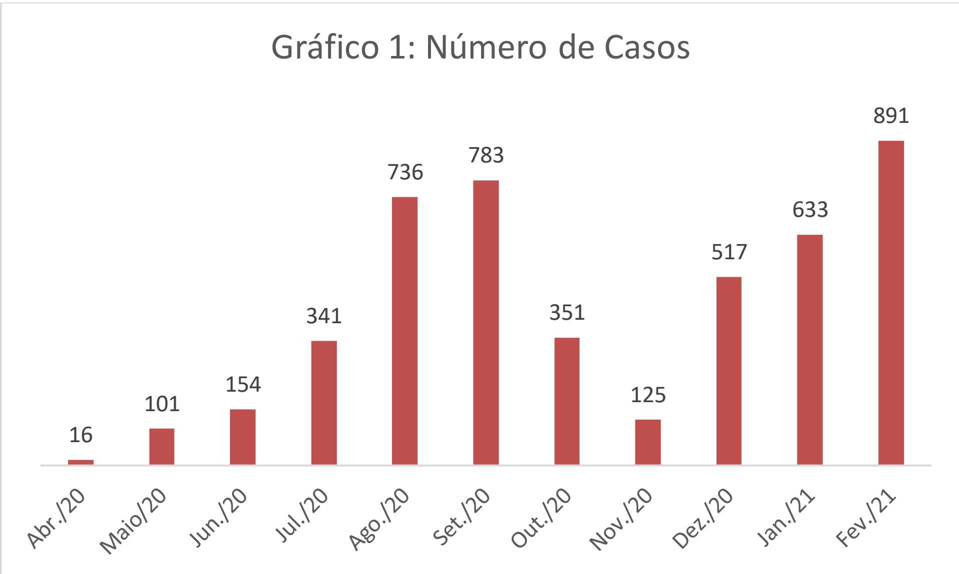
No Brasil, o primeiro caso confirmado data de 26 de fevereiro de 2020, de um homem de 62 anos que retornará de viagem da Itália (até então epicentro global da Pandemia). Após um ano e quatro meses do primeiro caso oficial confirmado o país conta com mais de dezoito milhões de infectados e mais de quinhentos mil óbitos. Nesse contexto o estado de Minas Gerais (MG) apresenta um dos mais elevados índices de casos/mortes, sendo aproximadamente 1,7 milhões de infectados e mais de quarenta mil mortes.

A pesquisa foi realizada na cidade de Paracatu (MG), localizada na região noroeste do estado. Para o desenvolvimento da pesquisa foram coletados dados de Covid-19 no site da Prefeitura Municipal.

Dentre os dados coletados estão o número de casos, número de óbitos e número de recuperados, estes dados ainda estão subdivididos por período, por gênero, por faixa etária e por bairro.

A modelagem consiste na análise dos números de casos no período de abril de 2020 à fevereiro de 2021, a partir do modelo II demostrado no tópico anterior.

Contudo, chega-se a:



Fonte: Edilene (2021)

Ao observar o gráfico acima, percebe-se que há um crescimento no número de casos de abril à setembro, posteriormente decréscimo no período de setembro à novembro, e no último período há novamente elevação na quantidade de casos.

Para o estudo tomara-se $t = 1$ para o mês de abril e consequentemente $y(1) = 16$. Além disso, todo o período será subdividido, ou seja, primeiro intervalo $t \in [1, 6[$, segundo intervalo $t \in [6, 8[$ e terceiro intervalo $t \in [8, 11[$.

Conforme mencionado anteriormente o modelo II será empregado na modelagem dos dados, ou seja, utilizaremos para mensurar o número de infectados $P(t) = P_0 e^{-\beta t}$.

Ao observar o gráfico percebe-se que o gráfico está disperso, para obtenção da constante β, será utilizado o ajuste de curva por mínimos quadrados. Assim:

$$y = \alpha e^{bx}$$

$$ln(y) = ln(\alpha e^{bx})$$

$$ln(y) = ln\alpha + lne^{bx}$$

$$ln(y) = ln\alpha + bx$$

Ao fazer $Y = \ln(y)$ e $a = ln(\alpha)$,a equação reduz-se a $Y = a + bx$, ou seja, um problema ao ajuste de uma reta de pontos tabelados (x_i, y_i).

Conforme resultados expressos em Franco (2007), para ajuste de retas por mínimos quadrados deve-se resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} na + \sum_{i=1}^{n} x_i \, b = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \, a + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Assim, teremos:

- Primeiro intervalo:

x_i	1	2	3	4	5
lny_i	2.7726	4.6151	5.0369	5.8319	6.6012

Com isso, chega-se: $\sum_{i=1}^{5} x_i = 15$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55$,$\sum_{i=1}^{5} y_i = 24.8577$ e $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 83.4471$, que resulta no sistema:

$$\begin{cases} 5a + 15b = 24.8577 \\ 15a + 55b = 83.4471 \end{cases}$$

Ao multiplicar a primeira linha por (-3) e somar as equações obtém-se:

$$10b = 8.874$$

$$b = 0.8874$$

Substituindo $b = 0.8874$ na primeira equação chega-se a:

$$5a + 15b = 24.8577$$
$$5a + 13.311 = 24.8577$$
$$5a = 11.5467$$
$$a = 2.30934$$

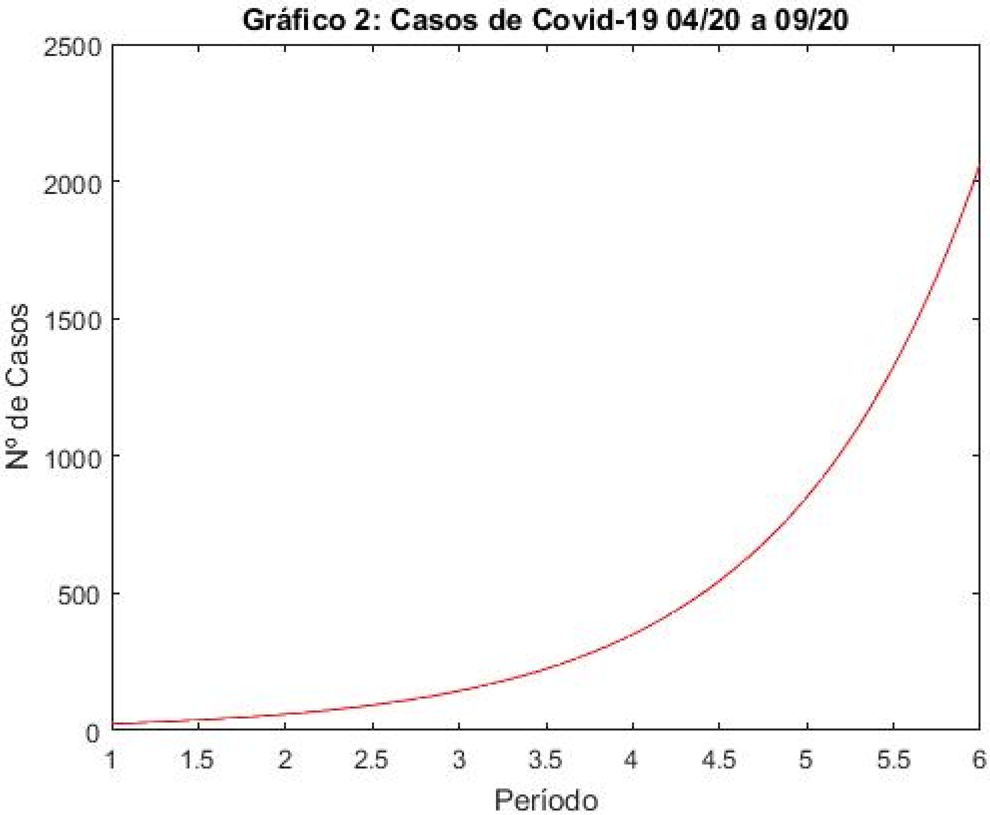
Como, $a = ln(\alpha)$ então $\alpha = e^{a}$, logo:

$$\alpha = e^{2.30934} \quad \rightarrow \alpha = 10.0677$$

Logo,

$$P(t) = 10.0677e^{0.8874t}$$

Abaixo, segue o gráfico da função obtida no intervalo $t \in [1, 6[$, com a aproximação de $t = 6$.



Fonte: Edilene (2021)

- Segundo intervalo:

x_i	6	7
lny_i	6.6631	5.8608

Logo, $\sum_{i=6}^{7} x_i = 13$, $\sum_{i=6}^{7} x_i^2 = 85, \sum_{i=6}^{7} y_i = 12.5239$ e $\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 81.0042$, que resulta no sistema:

$$\begin{cases} 2a + 13b = 12.5239 \\ 13a + 85b = 81.0042 \end{cases}$$

Ao multiplicar a primeira linha por (-13) , a segunda linha por (2) e somar as equações obtém-se:

$$b = -0.8023$$

Substituindo $b = -0.8023$ na primeira equação chega-se a:

$$2a + 13b = 12.5239$$

$$2a - 10.4299 = 12.5239$$

$$2a = 22.9538 \quad \rightarrow \ a = 11.4769$$

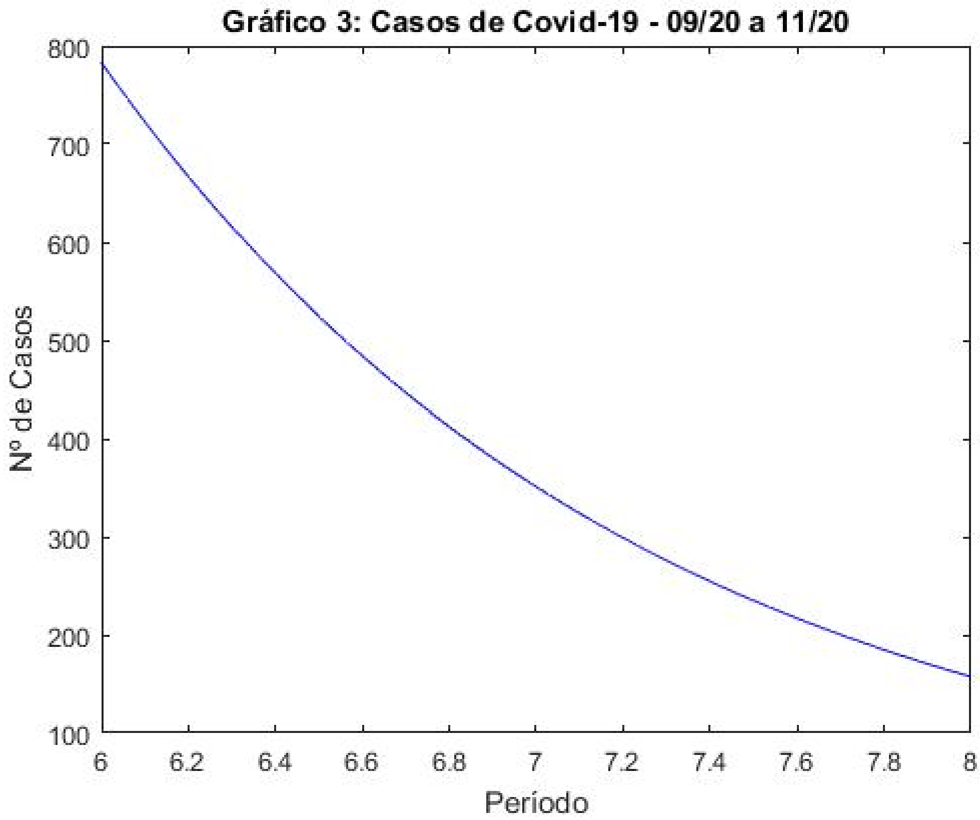
Como, $a = ln(\alpha)$ então $\alpha = e^a$, logo:

$$\alpha = e^{11.4769} \quad \rightarrow \alpha = 96{,}461.57$$

Logo,

$$P(t) = 96{,}461.57e^{-0.8023t}$$

A seguir temos o gráfico da função obtida no intervalo $t \in [6, 8[$, com a aproximação de $t = 8$.



Fonte: Edilene (2021)

- Terceiro intervalo:

x_i	8	9	10
lny_i	4.8283	6.2480	6.4505

Logo, $\sum_{i=8}^{10} x_i = 27$, $\sum_{i=8}^{10} x_i^2 = 245, \sum_{i=8}^{10} y_i = 17.5268$ e $\sum_{i=8}^{10} x_i y_i = 159.3634$, que resulta no sistema:

$$\begin{cases} 3a + 27b = 17.5268 \\ 27a + 245b = 159.3634 \end{cases}$$

Ao multiplicar a primeira linha por (-9) , e somar as equações obtém-se:

$$b = 0.8111$$

Substituindo $b = 0.8313$ na primeira equação chega-se a:

$$3a + 27b = 17.5223$$

$$3a + 21.8997 = 17.5223$$

$$3a = -4.3774$$

$$a = -1.4591$$

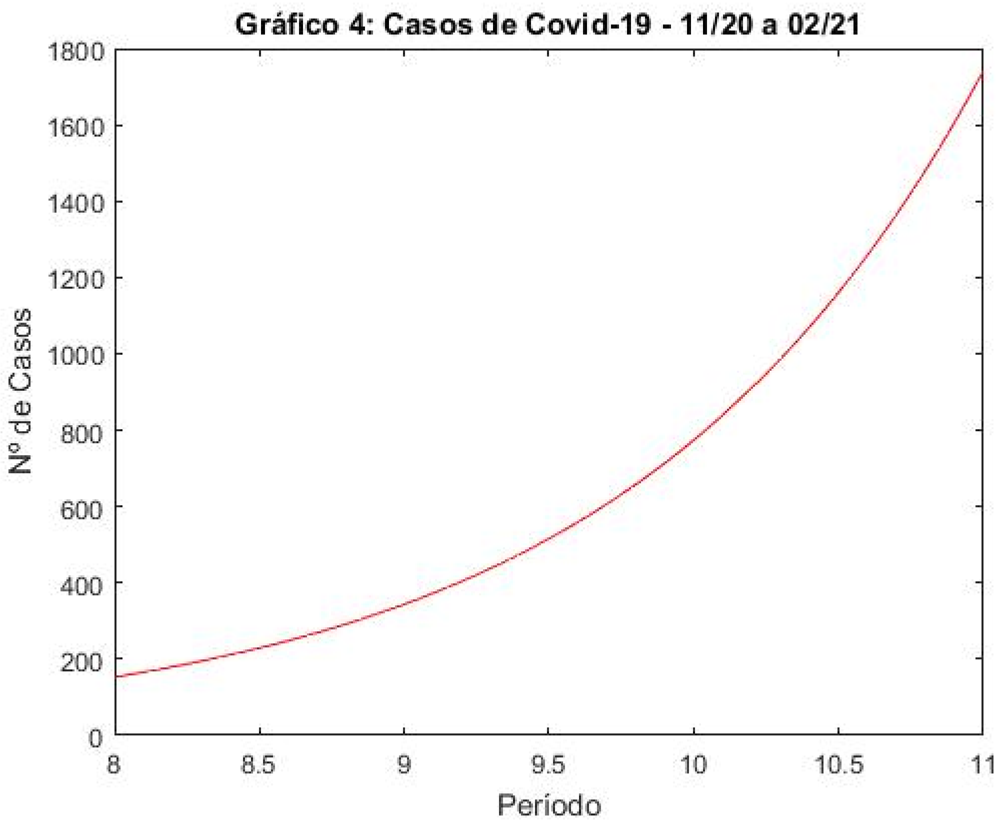
Como, $a = ln(\alpha)$ então $\alpha = e^{a}$, logo:

$$\alpha = e^{-1.4591} \quad \rightarrow \alpha = 0.2324$$

Logo,

$$P(t) = 0.2324e^{0.8111t}$$

O último gráfico representa a função obtida no intervalo $t \in [8, 11[$, com a aproximação de $t = 11$.



Fonte: Edilene (2021)

3.4 Análise dos resultados

Após a modelagem dos dados e ajuste das curvas, chega-se no primeiro intervalo a função $P(t) = 10.0677e^{0.8874t}$, ao fazer a estimativa do número de infectados para o mês de setembro de 2020 (sexto mês) tem-se $P(6) = 10.0677e^{0.8874.6} \rightarrow P(6) \cong 2066$ infectados, ou seja, os gestores agiram corretamente ao impor toque de recolher e tomar medidas que diminuíram a circulação de pessoas, pois o número de casos registrados nesse mês foi de 783 infectados.

No segundo intervalo a função obtida foi $P(t) = 96{,}461.57e^{-0.8023t}$, ao aproximar o número de infectados para o mês de novembro de 2020 (oitavo mês) tem-se $P(8) = 96{,}461.57e^{-0.8023.8} \rightarrow P(8) \cong 157$ infectados, percebe-se que a quantidade de infectados através da função se assemelha ao número de casos registrados em novembro que foi de 125.

O comportamento do terceiro intervalo é similar ao primeiro, isso porque o gráfico apresenta aumento dos números de casos e o início da segunda onda de propagação da doença. Com isso, para o intervalo tem a função $P(t) = 0.2324e^{0.8111t}$, ao aproximar o número de infectados para o mês de fevereiro de 2021 (décimo primeiro mês) chega-se a $P(11) = P(t) = 0.2324e^{0.8111.11} \rightarrow P(11) \cong 1742$ infectados, o que mais uma prevenção comprova a eficácia das medidas controle da doença, haja visto que o total de casos registrados nesse mês foi de pouco mais da metade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procurou-se estudar a modelagem matemática aplicada a problemas epidemiológicos. Abaixo segue a descrição de algumas etapas que nortearam a pesquisa, assim como algumas conclusões.

Inicialmente, foi realizado um levantamento bibliográfico sobre Equações Diferenciais, Modelagem Matemática e Epidemiologia. Observou-se que as Equações Diferencias são de grande valia, pois estão inseridas em diversas outras áreas, como a Química, Biologia, Física, Economia entre outras. Além disso, esta pesquisa permitiu conhecer os aspectos teóricos da Modelagem, explorando suas características e definições.

A última etapa consistiu inicialmente na pesquisa bibliográfica de modelos epidemiológicos, e consequentemente na modelagem de dados de Covid-19 na cidade de Paracatu-MG.

Através deste trabalho foi constata-se que ao estudar modelos matemáticos direcionados a epidemiologia é possível prever e adotar medidas de controle de doenças infecciosas. Além disso, foi perceptível que a dinâmica das doenças modifica os modelos, as variáveis e os resultados dos fenômenos observados, tornando as equações mais ou menos complexas.

Por fim, verifica-se que as equações diferenciais ordinárias são de suma importância e que estão inseridas em vários problemas cotidianos, conhecer sobre essas técnicas é fundamental para o controle de novas epidemias (ou pandemias). O trabalho utilizou-se de modelos simplificados. Espera-se em trabalhos futuros aprofundar a pesquisa e desenvolver novos modelos que se utilizem de mais variáveis.

REFERÊNCIAS

ALONSO, D. **The Stochastic Nature of Ecological Interactions: Communities, Metapopulations and Epidemics**. Tese de Doutorado, Complex System Laboratory, Universitat Politècnica de Catalunya, 2004.

BARATA, C. R. B. de, **Epidemias.** Rio de Janeiro: Cadernos de Saúde Pública, (1987).

BASSANEZI, R. C., **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia** / São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed., 3ª reimpressão, São Paulo: Editora Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Implicações no ensino-aprendizagem**. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. II Segmento**. 3o e 4o ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998;

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Vol. 02-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. 2006;

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, Rio de Janeiro: LTC, (2006).

BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. **Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações**. 2 ed. rev. ampl. Ponta Grossa, Editora UEPG, 2016.

BURAK, D. **Modelagem Matemática e a Sala de Aula**. In: I EPMEM - Encontro Paranaense da Modelagem na Educação Matemática. Londrina. Anais... Londrina: 2004.

BURAK, D.; KLÜBER, Tiago E. **Educação Matemática: contribuições para a compreensão da sua natureza.** Acta Scientiae (ULBRA), v. 10, p. 93 - 106, jul./dez. 2008.

BUENO, R. W. S.; LARA, D. S.; LOPES, N. da R. **Newton, Leibniz e Bolt: modelação na formação de professores de matemática.** EMR-RS - ANO 22 - 2021 - número 22 - v.1 – p. 77, https://www.researchgate.net/publication/352041482_Newton_Leibniz_e_Bolt_modelacao_na_formacao_de_professores_de_matematica . Acesso em 06 de jun. de 2021.

FLORIN, D. **Introdução a Equações Diferencias: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GORDIS, L. **Epidemias**. Rio de Janeiro: REVINTER, 2004.

KREYSIG, E. **Matemática Superior para Engenharia**. Volume 1. 9. ed. LTC: 2008.

NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. **Equações Diferenciais**, São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

NEPOMUCENO, E. G. **Dinâmica, Modelagem e Controle de Epidemias**. Tese de doutorado, 2005.

ROCHA, D. I. C. **Modelagem Matemáticos aplicados a epidemiologia.** Dissertação de Mestrado, Faculdade de Economia da Universidade do Porto (FEP), 2012.

SOUZA, E. S. R. de; SILVA, F. R. A. da; MAFRA, J. R. e S.. **Modelagem matemática na educação amazônica. V**olume 1. Bélem, PA. RFB Editora, 2020.

STEWART, J. **Cálculo:** Volume 2. Tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins, São Paulo, 2009.

YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. **Equações diferenciais**. Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância, 2017.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R., **Equações Diferenciais com Aplicações em modelagem**. São Paulo, Pioneira Thompson Learning, 2003.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R., **Equações Diferenciais.** São Paulo, Pearson Makron Books, Vol. 1, 2001.